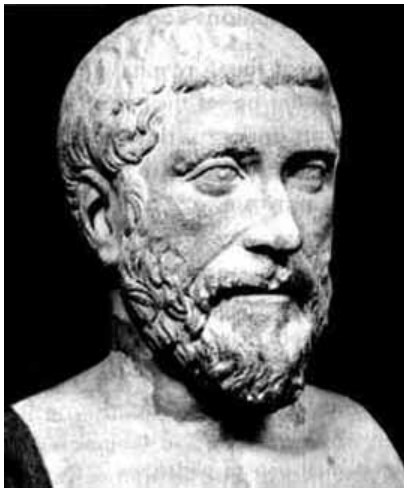
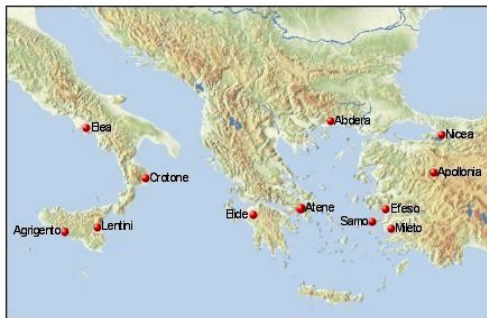
Istituto Istruzione Superiore
G. Mazzatinti, Gubbio

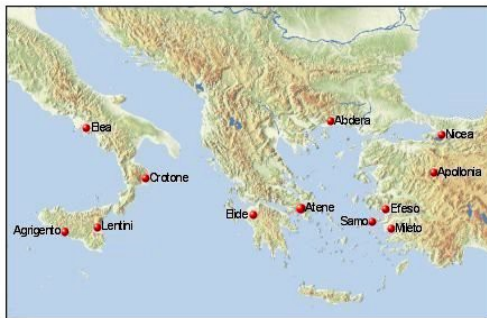
IRRAZIONALI CONSEGUENZE

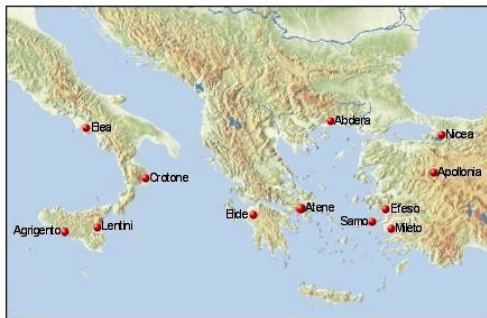
Federico Greco

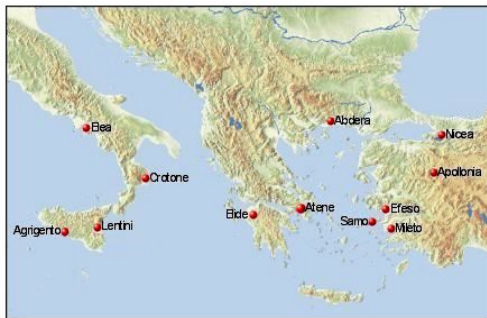
3 febbraio 2015

Progetto SOSTA

(ca. 570 a.C.; ca. 495 a.C.)

PITAGORA: I LUOGHI

- Nasce a **Samo**

PITAGORA: I LUOGHI

- Nasce a **Samo**
- Ha viaggiato molto (contatti con egiziani e babilonesi)

PITAGORA: I LUOGHI

- Nasce a **Samo**
- Ha viaggiato molto (contatti con egiziani e babilonesi)
- Muore a **Metaponto**

Pitagora: I luoghi

- Nasce a **Samo**
- Ha viaggiato molto (contatti con egiziani e babilonesi)
- Muore a **Metaponto**
- Scuola pitagorica, fondata a **Crotone**

Carl Boyer, **Storia della matematica**, pag. 58:

Carl Boyer, **Storia della matematica**, pag. 58:

La sua figura riuniva in sé molti significati diversi per il pubblico più vasto: egli era al tempo stesso il filosofo, l'astronomo, il matematico, colui che non sopportava i fagioli, il santo, il profeta, colui che faceva i miracoli, il mago, il ciarlatano

Pitagora: Dicono di lui

Carl Boyer, **Storia della matematica**, pag. 58:

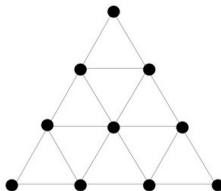
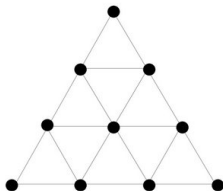
La sua figura riuniva in sé molti significati diversi per il pubblico più vasto: egli era al tempo stesso il filosofo, l'astronomo, il matematico, colui che non sopportava i fagioli, il santo, il profeta, colui che faceva i miracoli, il mago, il ciarlatano

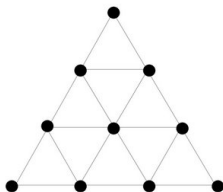
Eric Bell, **I grandi matematici**, pag. 51:

Carl Boyer, **Storia della matematica**, pag. 58:

La sua figura riuniva in sé molti significati diversi per il pubblico più vasto: egli era al tempo stesso il filosofo, l'astronomo, il matematico, colui che non sopportava i fagioli, il santo, il profeta, colui che faceva i miracoli, il mago, il ciarlatano

Eric Bell, **I grandi matematici**, pag. 51:

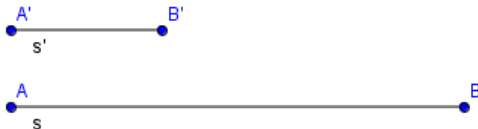
La sua vita è diventata una favola, ma la sua opera ha importanza per il progresso della matematica solo se viene distinta dal misticismo bizzarro del numero, di cui egli rivestiva le proprie speculazioni cosmiche

- Prima dimostrazione del Teorema di Pitagora

- Prima dimostrazione del Teorema di Pitagora
- Inizio della visione della matematica come speculazione
  [*a detta dello storico greco Proclo (410-485 d.C.)*]

LA SCUOLA PITAGORICA E LA MATEMATICA

- Prima dimostrazione del Teorema di Pitagora
- Inizio della visione della matematica come speculazione
  [*a detta dello storico greco Proclo (410-485 d.C.)*]
- Scoperta dell'**incommensurabilità** reciproca di alcuni enti geometrici

INCOMMENSURABILITÀ

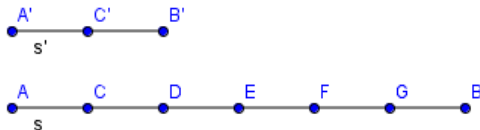
Due numeri, due grandezze si dicono incommensurabili se non hanno un **sottomultiplo** comune.

INCOMMENSURABILITÀ

Due numeri, due grandezze si dicono incommensurabili se non hanno un **sottomultiplo** comune.

s e s' sono segmenti di lunghezza $2\,u$ e $\dfrac{2}{3}\,u$ rispetto a u.d.m. u fissata.

INCOMMENSURABILITÀ

Due numeri, due grandezze si dicono incommensurabili se non hanno un **sottomultiplo** comune.

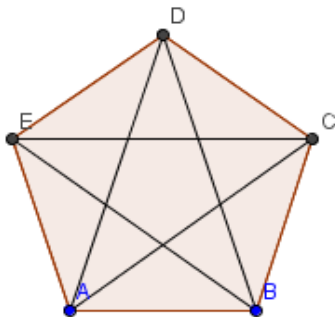
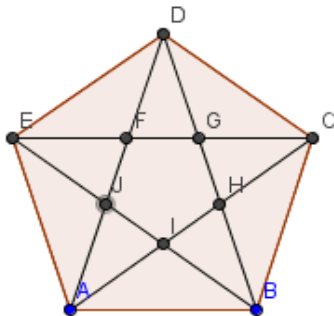
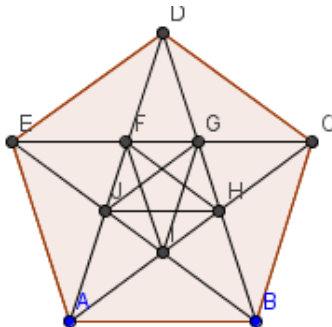
s e s' sono segmenti di lunghezza $2\,u$ e $\dfrac{2}{3}\,u$ rispetto a u.d.m. u fissata.
Rispetto a una nuova u.d.m. u' misurano $6\,u'$ e $2\,u'$

Quanto vale u rispetto a u'?

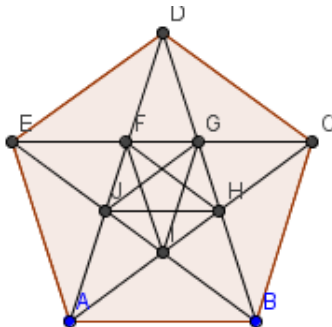
INCOMMENSURABILITÀ

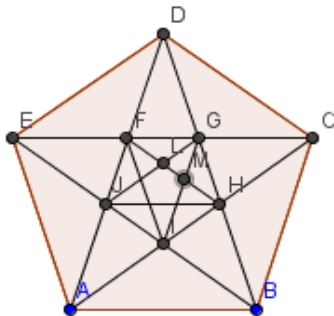
Due numeri, due grandezze si dicono incommensurabili se non hanno un **sottomultiplo** comune.

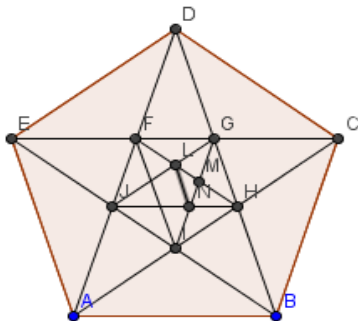
COMMENSURABILIÀ

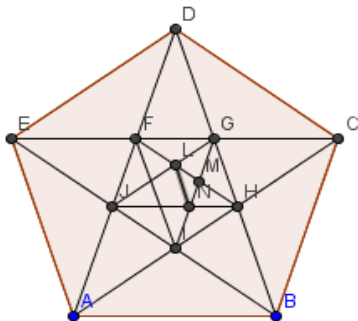
Due grandezze sono commensurabili se è possibile determinare una unità di misura rispetto alla quale le due grandezze abbiano entrambe una misura equivalente a un numero intero.

Il lato DE e la diagonale EC del pentagono $ABCDE$ sono commensurabili?

Il lato *DE* e la diagonale *EC* del pentagono *ABCDE* sono commensurabili?

FG giace su *EC* ed è lato di un pentagono regolare *FGHIJ* più piccolo.

DE ed *EC* sono commensurabili **se e solo se** lo sono anche *FG* e *FH*

DE ed *EC* sono commensurabili **se e solo se** lo sono anche *FG* e *FH*

Tracciando le diagonali di *FGHIJ* otteniamo un pentagono ancor più piccolo

DE ed *EC* sono commensurabili **se e solo se** lo sono anche *FG* e *FH*

FG ed *FH* sono commensurabili **se e solo se** lo sono anche *LM* e una diagonale del nuovo pentagono

DE ed *EC* sono commensurabili **se e solo se** lo sono anche *LM* e *LN*

Si possono inscrivere pentagoni uno dentro l'altro all'infinito

Non riusciremo mai a trovare un pentagono e una unità di misura per cui lato e diagonale siano commensurabili

Ogni unità di misura *u* sarebbe 'troppo grande'

PERCHÉ?

Lato e diagonale di un pentagono regolare hanno un rapporto esprimibile attraverso il numero irrazionale

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

PERCHÉ?

Lato e diagonale di un pentagono regolare hanno un rapporto esprimibile attraverso il numero irrazionale

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Questo numero è legato a quello che i greci chiamavano la **sezione aurea** di un segmento:

Perché?

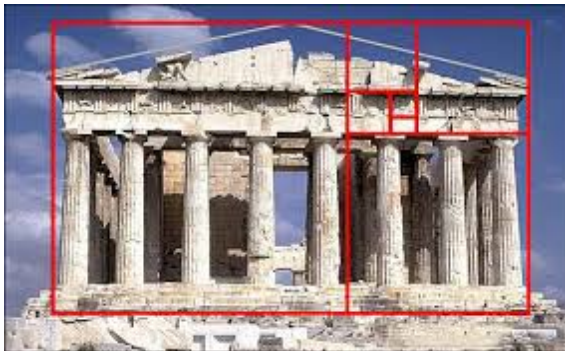
Lato e diagonale di un pentagono regolare hanno un rapporto esprimibile attraverso il numero irrazionale

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

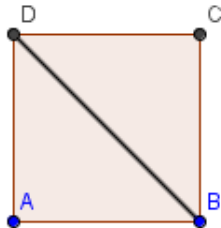
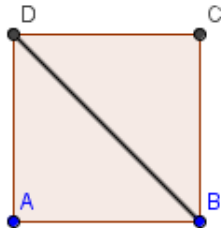
Questo numero è legato a quello che i greci chiamavano la **sezione aurea** di un segmento:

A H B

AH è la sezione aurea di AB, ovvero

$$\overline{AB} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{HB} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB}$$

Dietro ciò che i greci ritenevano bello, bello in modo assurdo

c'è un numero irrazionale

LATO E DIAGONALE DI UN QUADRATO

Lato e diagonale di un quadrato

Con un'altra costruzione che si ripete all'infinito si può dimostrare che diagonale d e lato l di un quadrato sono incommensurabili.

Dal teorema di Pitagora scopriamo che $d = l \cdot \sqrt{2}$

CONSEGUENZE FISICHE - 1

- La scuola pitagorica era una setta e non amava che si divulgassero all'esterno tecniche utilizzate, scoperte

CONSEGUENZE FISICHE - 1

- La scuola pitagorica era una setta e non amava che si divulgassero all'esterno tecniche utilizzate, scoperte
- Men che meno gli insuccessi dovevano essere divulgati

Conseguenze fisiche - 1

- La scuola pitagorica era una setta e non amava che si divulgassero all'esterno tecniche utilizzate, scoperte
- Men che meno gli insuccessi dovevano essere divulgati
- Scoprire che alcuni segmenti erano incommensurabili significava mettere limiti al concetto di **numero**, su cui i pitagorici avevano fondato la loro visione mistico-filosofica

CONSEGUENZE FISICHE - 1

- La scuola pitagorica era una setta e non amava che si divulgassero all'esterno tecniche utilizzate, scoperte
- Men che meno gli insuccessi dovevano essere divulgati
- Scoprire che alcuni segmenti erano incommensurabili significava mettere limiti al concetto di **numero**, su cui i pitagorici avevano fondato la loro visione mistico-filosofica
- I **numeri** che piacevano ai pitagorici erano quelli naturali e i razionali positivi, mentre dietro una coppia di incommensurabili c'era sempre un numero irrazionale

CONSEGUENZE FISICHE - 1

- La scuola pitagorica era una setta e non amava che si divulgassero all'esterno tecniche utilizzate, scoperte
- Men che meno gli insuccessi dovevano essere divulgati
- Scoprire che alcuni segmenti erano incommensurabili significava mettere limiti al concetto di **numero**, su cui i pitagorici avevano fondato la loro visione mistico-filosofica
- I **numeri** che piacevano ai pitagorici erano quelli naturali e i razionali positivi, mentre dietro una coppia di incommensurabili c'era sempre un numero irrazionale
- $\Rightarrow$ L'incommensurabilità era un segreto da tenere nascosto, più che un risultato rivoluzionario da divulgare

Ippaso di Metaponto

Uno dei principali esponenti della scuola dopo Pitagora

Ippaso di Metaponto

Uno dei principali esponenti della scuola dopo Pitagora

Morto misteriosamente, forse per aver rivelato risultati o tecniche per provare l'incommensurabilità

Conseguenze fisiche - 2

Lato di un cubo dato e lato di un cubo di area doppia sono incommensurabili perché $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale

Conseguenze fisiche - 2

Lato di un cubo dato e lato di un cubo di area doppia sono incommensurabili perché $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale

Cittadini di Delo non sapete duplicare un altare cubico?
E allora beccatevi la peste

INTERMEZZO

NON DATE MAI...

Un matematico, un fisico ed un ingegnere stanno attraversando in treno una landa scozzese. In un campo scorgono **otto pecore**. L'ingegnere, guardandole, dice: 'Dal fatto che queste pecore sono tutte di color nero potremmo dedurre che la maggior parte delle pecore della Scozia sono nere.' Il fisico osserva: 'In realtà, possiamo solo dedurre che in Scozia ci sono otto pecore di color nero.'

Non date mai...

Un matematico, un fisico ed un ingegnere stanno attraversando in treno una landa scozzese. In un campo scorgono **otto pecore**. L'ingegnere, guardandole, dice: 'Dal fatto che queste pecore sono tutte di color nero potremmo dedurre che la maggior parte delle pecore della Scozia sono nere.' Il fisico osserva: 'In realtà, possiamo solo dedurre che in Scozia ci sono otto pecore di color nero.'

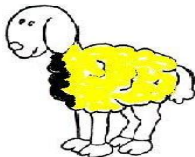
NON DATE MAI...

Un matematico, un fisico ed un ingegnere stanno attraversando in treno una landa scozzese. In un campo scorgono **otto pecore**. L'ingegnere, guardandole, dice: 'Dal fatto che queste pecore sono tutte di color nero potremmo dedurre che la maggior parte delle pecore della Scozia sono nere.'
Il fisico osserva: 'In realtà, possiamo solo dedurre che in Scozia ci sono otto pecore di color nero.'
Il matematico chiosa: 'Vi sbagliate entrambi. Possiamo solo dedurre che in Scozia esistono almeno otto pecore e che la parte di queste otto pecore che a noi è visibile è di color nero.'

Non date mai...

Un matematico, un fisico ed un ingegnere stanno attraversando in treno una landa scozzese. In un campo scorgono **otto pecore**. L'ingegnere, guardandole, dice: 'Dal fatto che queste pecore sono tutte di color nero potremmo dedurre che la maggior parte delle pecore della Scozia sono nere.'
Il fisico osserva: 'In realtà, possiamo solo dedurre che in Scozia ci sono otto pecore di color nero.'
Il matematico chiosa: 'Vi sbagliate entrambi. Possiamo solo dedurre che in Scozia esistono almeno otto pecore e che la parte di queste otto pecore che a noi è visibile è di color nero.'

Per me la matematica è...

Per me la matematica è...

La scienza delle pecore gialle solo da un lato

MUSICA

La matematica si trova nei posti più impensati

ONDE SU UNA CORDA

Prendiamo una corda

- Pizzicando una corda al **centro** otteniamo quella che in fisica si chiama onda stazionaria. Essa genera un suono che ha una frequenza legata al **materiale** di cui è fatta la corda e che bene si accorda alla **lunghezza** della corda stessa [*modo normale*]

Prendiamo una corda

- Pizzicando una corda al **centro** otteniamo quella che in fisica si chiama onda stazionaria. Essa genera un suono che ha una frequenza legata al **materiale** di cui è fatta la corda e che bene si accorda alla **lunghezza** della corda stessa [*modo normale*]
- Se pizzichiamo la stessa corda a **un quarto** della sua lunghezza otteniamo un altro suono che ha una frequenza doppia del suono precedente

Prendiamo una corda

- Pizzicando una corda al **centro** otteniamo quella che in fisica si chiama onda stazionaria. Essa genera un suono che ha una frequenza legata al **materiale** di cui è fatta la corda e che bene si accorda alla **lunghezza** della corda stessa [*modo normale*]
- Se pizzichiamo la stessa corda a **un quarto** della sua lunghezza otteniamo un altro suono che ha una frequenza doppia del suono precedente
- A **un ottavo**, **un sedicesimo**, etc. succede la stessa cosa [tutti *modi normali*]

ONDE SU UNA CORDA

Prendiamo una corda

- Pizzicando una corda al **centro** otteniamo quella che in fisica si chiama onda stazionaria. Essa genera un suono che ha una frequenza legata al **materiale** di cui è fatta la corda e che bene si accorda alla **lunghezza** della corda stessa [*modo normale*]
- Se pizzichiamo la stessa corda a **un quarto** della sua lunghezza otteniamo un altro suono che ha una frequenza doppia del suono precedente
- A **un ottavo**, **un sedicesimo**, etc. succede la stessa cosa [tutti *modi normali*]
- L'orecchio umano percepisce questi suoni allo stesso modo. Nota solo una differenza in altezza: il primo è più grave, il secondo più acuto, il terzo ancora più acuto e via così

Onde su una corda

Prendiamo una corda

- Pizzicando una corda al **centro** otteniamo quella che in fisica si chiama onda stazionaria. Essa genera un suono che ha una frequenza legata al **materiale** di cui è fatta la corda e che bene si accorda alla **lunghezza** della corda stessa [*modo normale*]
- Se pizzichiamo la stessa corda a **un quarto** della sua lunghezza otteniamo un altro suono che ha una frequenza doppia del suono precedente
- A **un ottavo**, **un sedicesimo**, etc. succede la stessa cosa [tutti *modi normali*]
- L'orecchio umano percepisce questi suoni allo stesso modo. Nota solo una differenza in altezza: il primo è più grave, il secondo più acuto, il terzo ancora più acuto e via così

ONDE SU UNA CORDA

Prendiamo una corda

- Pizzicando una corda al **centro** otteniamo quella che in fisica si chiama onda stazionaria. Essa genera un suono che ha una frequenza legata al **materiale** di cui è fatta la corda e che bene si accorda alla **lunghezza** della corda stessa [*modo normale*]
- Se pizzichiamo la stessa corda a **un quarto** della sua lunghezza otteniamo un altro suono che ha una frequenza doppia del suono precedente
- A **un ottavo**, **un sedicesimo**, etc. succede la stessa cosa [tutti *modi normali*]
- L'orecchio umano percepisce questi suoni allo stesso modo. Nota solo una differenza in altezza: il primo è più grave, il secondo più acuto, il terzo ancora più acuto e via così

L'intervallo di **ottava** separa due suoni il cui rapporto in frequenza è 2:1

La scuola pitagorica e la musica

La scuola pitagorica fu la prima a scoprire questa proprietà, ma...

La scuola pitagorica e la musica

La scuola pitagorica fu la prima a scoprire questa proprietà, ma...

il misticismo bizzarro del numero spinse i pitagorici a pensare che un suono era buono solo se generato da una bella proporzione

La scuola pitagorica e la musica

La scuola pitagorica fu la prima a scoprire questa proprietà, ma...

il misticismo bizzarro del numero spinse i pitagorici a pensare che un suono era buono solo se generato da una bella proporzione

Scala pitagorica

Sono suoni consonanti (*leggete stanno bene insieme*) tutti quei suoni che sono generati da un rapporto 2:1 o da un rapporto 3:2

LA SCUOLA PITAGORICA E LA MUSICA

La scuola pitagorica fu la prima a scoprire questa proprietà, ma...

il misticismo bizzarro del numero spinse i pitagorici a pensare che un suono era buono solo se generato da una bella proporzione

SCALA PITAGORICA

Sono suoni consonanti (*leggete stanno bene insieme*) tutti quei suoni che sono generati da un rapporto 2:1 o da un rapporto 3:2

Intervallo di **quinta** ascendente:

regola generativa (ascendente)	...	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	3:2	9:8	27:16	81:64	243:128	729:512	...
nota	Do	Sol	Re	La	Mi	Si	Fa #	...
intervallo	...	V	II M	VI M	III M	VII M	IV+	...

La scuola pitagorica fu la prima a scoprire questa proprietà, ma...

il misticismo bizzarro del numero spinse i pitagorici a pensare che un suono era buono solo se generato da una bella proporzione

SCALA PITAGORICA

Sono suoni consonanti (*leggete stanno bene insieme*) tutti quei suoni che sono generati da un rapporto 2:1 o da un rapporto 3:2

Intervallo di **quinta** discendente:

regola generativa (discendente)	...	$\frac{2}{3} \cdot 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 2^4$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	4:3	16:9	32:27	128:81	256:243	1024:729	...
nota	Do	Fa	Si♭	Mi♭	La♭	Re♭	Sol♭	...
intervallo	Unisono	IV	VII m	III m	VI m	II m	V-	...

Ogni nota nella ascendente è generata

- moltiplicando per $3/2$ la frequenza della nota precedente

regola generativa (ascendente)	...	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	3:2	9:8	27:16	81:64	243:128	729:512	...
nota	Do	Sol	Re	La	Mi	Si	Fa #	...
intervallo	...	V	II M	VI M	III M	VII M	IV+	...

Ogni nota nella ascendente è generata

- moltiplicando per $3/2$ la frequenza della nota precedente
- se la nota così ottenuta non appartiene alla prima ottava, la si riporta dividendo per una opportuna potenza di due

regola generativa (ascendente)	...	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	3:2	9:8	27:16	81:64	243:128	729:512	...
nota	Do	Sol	Re	La	Mi	Si	Fa #	...
intervallo	...	V	II M	VI M	III M	VII M	IV+	...

Ogni nota nella ascendente è generata

- moltiplicando per $3/2$ la frequenza della nota precedente
- se la nota così ottenuta non appartiene alla prima ottava, la si riporta dividendo per una opportuna potenza di due
- ricordiamo che la seconda procedura fornisce la stessa nota, ma nell'ottava richiesta

regola generativa (ascendente)	...	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	3:2	9:8	27:16	81:64	243:128	729:512	...
nota	Do	Sol	Re	La	Mi	Si	Fa #	...
intervallo	...	V	II M	VI M	III M	VII M	IV+	...

Ogni nota nella discendente

- dividendo per $3/2$ la frequenza della nota precedente

regola generativa (discendente)	...	$\frac{2}{3}\cdot 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot 2^4$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	4:3	16:9	32:27	128:81	256:243	1024:729	...
nota	Do	Fa	Si♭	Mi♭	La♭	Re♭	Sol♭	...
intervallo	Unisono	IV	VII m	III m	VI m	II m	V-	...

La scuola pitagorica e la musica

Ogni nota nella discendente

- dividendo per $3/2$ la frequenza della nota precedente
- se la nota così ottenuta non appartiene alla prima ottava, la si riporta moltiplicando per una opportuna potenza di due

regola generativa (discendente)	...	$\frac{2}{3}\cdot 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot 2^4$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	4:3	16:9	32:27	128:81	256:243	1024:729	...
nota	Do	Fa	Si♭	Mi♭	La♭	Re♭	Sol♭	...
intervallo	Unisono	IV	VII m	III m	VI m	II m	V-	...

Ogni nota nella discendente

- dividendo per $3/2$ la frequenza della nota precedente
- se la nota così ottenuta non appartiene alla prima ottava, la si riporta moltiplicando per una opportuna potenza di due
- ricordiamo che la seconda procedura fornisce la stessa nota, ma nell'ottava richiesta

regola generativa (discendente)	...	$\frac{2}{3} \cdot 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 2^4$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	4:3	16:9	32:27	128:81	256:243	1024:729	...
nota	Do	Fa	Si♭	Mi♭	La♭	Re♭	Sol♭	...
intervallo	Unisono	IV	VII m	III m	VI m	II m	V-	...

Con l'**ottava** e le due **quinte** otteniamo i 12 tasti ben noti che in un pianoforte o in una pianola vanno da un Do al successivo

Con l'**ottava** e le due **quinte** otteniamo i 12 tasti ben noti che in un pianoforte o in una pianola vanno da un Do al successivo

- I tasti dovrebbero essere almeno 13 perché le frequenze di Fa $\sharp$ e Sol $\flat$ non coincidono

Con l'**ottava** e le due **quinte** otteniamo i 12 tasti ben noti che in un pianoforte o in una pianola vanno da un Do al successivo

- I tasti dovrebbero essere almeno 13 perché le frequenze di Fa # e Sol ♭ non coincidono
- Tra due note consecutive a volte c'è un **tono**, a volte un **semitono** (dove ci sono i diesis)

Con l'**ottava** e le due **quinte** otteniamo i 12 tasti ben noti che in un pianoforte o in una pianola vanno da un Do al successivo

- I tasti dovrebbero essere almeno 13 perché le frequenze di Fa $\#$ e Sol $\flat$ non coincidono
- Tra due note consecutive a volte c'è un **tono**, a volte un **semitono** (dove ci sono i diesis)
- Il rapporto tra le frequenze di due note successive non è sempre lo stesso

Comma pitagorico

Nella scala pitagorica il Do $\#$ e il Re $\flat$ differiscono per 23.46 cent (centesimi di semitono)
La differenza è detta comma pitagorico

COMMA PITAGORICO

Nella scala pitagorica il Do # e il Re ♭ differiscono per 23.46 cent (centesimi di semitono)
La differenza è detta comma pitagorico

SCALA NATURALE

Si considerano consonanti anche gli intervalli di **sesta** e di **terza**

Comma pitagorico

Nella scala pitagorica il Do $\#$ e il Re $\flat$ differiscono per 23.46 cent (centesimi di semitono)
La differenza è detta comma pitagorico

Scala naturale

Si considerano consonanti anche gli intervalli di **sesta** e di **terza**

Comma zarliniano

Un intervallo di sesta seguito da uno di quarta non corrisponde a due quinte perfette consecutive
La differenza è detta comma zarliniano

DIFFERENZA FRA LE SCALE

Le frequenze che contraddistinguono Mi, La e Si nelle scala pitagorica e in quella naturale differiscono

Nota	rapporto	
	naturale	pitagorica
Do	1:1	
Re	9:8	
Mi	5:4	81:64
Fa	4:3	
Sol	3:2	
La	5:3	27:16
Si	15:8	243:128
Do	2:1	

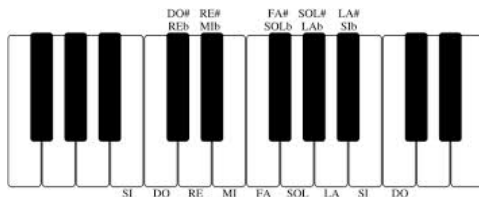
DIFFERENZA FRA LE SCALE

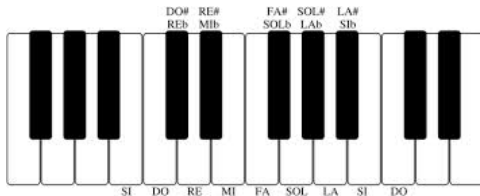
Il rapporto tra una nota piena e una precedente nella scala naturale varia tra 9 : 8 e 16 : 15. Questo crea problemi se si devono far suonare insieme strumenti accordati con chiavi diverse (problema di attualità con l'avvento della musica polifonica)

possibili intervalli tra i gradi consecutivi della scala naturale

intervallo	rapporto	cent
tono maggiore	9:8	204
tono minore	10:9	182
semitono diatonico	16:15	112

TEMPERAMENTO EQUABILE

La **soluzione matematica** è quella di distribuire in modo uniforme (rispetto alle loro frequenze) i 12 **semitoni** che si formano tra due DO successivi

TEMPERAMENTO EQUABILE

La **soluzione matematica** è quella di distribuire in modo uniforme (rispetto alle loro frequenze) i 12 **semitoni** che si formano tra due Do successivi

TONI E SEMITONI

Il **rapporto** r tra le frequenze di due note successive deve essere lo stesso. Quanto vale r?

1. Se indico con f_1 la frequenza del Do che apre l'ottava, con f_2 la frequenza del Do#, con f_3 la frequenza del Re, ... con f_{12} la frequenza del Do che chiude l'ottava, io ho che

$$\frac{f_2}{f_1} = r, \quad \frac{f_3}{f_2} = r, \quad \ldots, \quad \frac{f_{12}}{f_{11}} = r \tag{1}$$

$$f_{12} = 2 \cdot f_1 \tag{2}$$

1. Se indico con f_1 la frequenza del Do che apre l'ottava, con f_2 la frequenza del Do#, con f_3 la frequenza del Re, …con f_{12} la frequenza del Do che chiude l'ottava, io ho che

$$\frac{f_2}{f_1} = r, \quad \frac{f_3}{f_2} = r, \quad \ldots, \quad \frac{f_{12}}{f_{11}} = r \tag{1}$$

$$f_{12} = 2 \cdot f_1 \tag{2}$$

2. Dalle equazioni (1), attraverso sostituzioni successive, ottengo

$$f_2 = r \cdot f_1, \quad f_3 = r \cdot f_2 = r^2 \cdot f_1, \quad \ldots$$
$$f_{12} = r \cdot f_{11} = \ldots = r^{11} \cdot f_2 = r^{12} \cdot f_1$$

1. Se indico con f_1 la frequenza del Do che apre l'ottava, con f_2 la frequenza del Do#, con f_3 la frequenza del Re, ... con f_{12} la frequenza del Do che chiude l'ottava, io ho che

$$\frac{f_2}{f_1} = r, \quad \frac{f_3}{f_2} = r, \quad \dots, \quad \frac{f_{12}}{f_{11}} = r \tag{1}$$

$$f_{12} = 2 \cdot f_1 \tag{2}$$

2. Dalle equazioni (1), attraverso sostituzioni successive, ottengo

$$f_2 = r \cdot f_1, \quad f_3 = r \cdot f_2 = r^2 \cdot f_1, \quad \dots$$
$$f_{12} = r \cdot f_{11} = \dots = r^{11} \cdot f_2 = r^{12} \cdot f_1$$

3. Mettendo insieme l'ultima relazione ottenuta e (2) otteniamo

$$r^{12} \cdot f_1 = 2 \cdot f_1, \qquad \Rightarrow \qquad r^{12} = 2$$

1. Se indico con f_1 la frequenza del Do che apre l'ottava, con f_2 la frequenza del Do#, con f_3 la frequenza del Re, ... con f_{12} la frequenza del Do che chiude l'ottava, io ho che

$$\frac{f_2}{f_1} = r, \quad \frac{f_3}{f_2} = r, \quad \dots, \quad \frac{f_{12}}{f_{11}} = r \tag{1}$$

$$f_{12} = 2 \cdot f_1 \tag{2}$$

2. Dalle equazioni (1), attraverso sostituzioni successive, ottengo

$$f_2 = r \cdot f_1, \quad f_3 = r \cdot f_2 = r^2 \cdot f_1, \quad \dots$$
$$f_{12} = r \cdot f_{11} = \dots = r^{11} \cdot f_2 = r^{12} \cdot f_1$$

3. Mettendo insieme l'ultima relazione ottenuta e (2) otteniamo

$$r^{12} \cdot f_1 = 2 \cdot f_1, \qquad \Rightarrow \qquad r^{12} = 2$$

4. Quindi, $r = \sqrt[12]{2}$

TONI E SEMITONI

Il **rapporto** r tra le frequenze di due note successive nel temperamento equabile è il numero irrazionale,

$$r = \sqrt[12]{2} \approx 1.0594$$

TEMPERAMENTO EQUABILE

TONI E SEMITONI

Il **rapporto** r tra le frequenze di due note successive nel temperamento equabile è il numero irrazionale,

$$r = \sqrt[12]{2} \approx 1.0594$$

SCALA TEMPERATA

- La scala temperata era già usata empiricamente

Temperamento equabile

Toni e semitoni

Il **rapporto** r tra le frequenze di due note successive nel temperamento equabile è il numero irrazionale,

$$r \quad = \quad \sqrt[12]{2} \quad \approx \quad 1.0594$$

Scala temperata

- La scala temperata era già usata empiricamente
- fu teorizzata da Andreas Weckmeister nel 1691

TONI E SEMITONI

Il **rapporto** r tra le frequenze di due note successive nel temperamento equabile è il numero irrazionale,

$$r = \sqrt[12]{2} \approx 1.0594$$

SCALA TEMPERATA

- La scala temperata era già usata empiricamente
- fu teorizzata da Andreas Weckmeister nel 1691
- Bach nel *Clavicembalo ben temperato* mostrò le enormi possibilità compositive di questo sistema

Temperamento equabile

Differenze in Hz tra le frequenze nel temperamento equabile e quelle nella scala cromatica pitagorica (scala pitagorica che opera alcune scelte a orecchio sui ’tasti’ doppi)

Temperamento equabile

nota	numero MIDI	rapporto	frequenza (Hz)	cent
Do_3	60	1	261.6	0
Do♯ o Re♭	61	$\sqrt[12]{2}$	277.2	100
Re	62	$\sqrt[12]{2^2}$	293.7	200
Re♯ o Mi♭	63	$\sqrt[12]{2^3}$	311.1	300
Mi	64	$\sqrt[12]{2^4}$	329.6	400
Fa	65	$\sqrt[12]{2^5}$	349.2	500
Fa♯ o Sol♭	66	$\sqrt[12]{2^6}$	370.0	600
Sol	67	$\sqrt[12]{2^7}$	392.0	700
Sol♯ o La♭	68	$\sqrt[12]{2^8}$	415.3	800
La	69	$\sqrt[12]{2^9}$	440.0	900
La♯ o Si♭	70	$\sqrt[12]{2^{10}}$	466.2	1000
Si	71	$\sqrt[12]{2^{11}}$	493.9	1100
Do_4	72	2	523.2	1200

Scala cromatica pitagorica

nota	rapporto	frequenza (Hz)	cent
Do	1:1	261.6	0
Do♯	2187:2048	279.4	114
Re	9:8	294.3	204
Mi♭	32:27	310.1	294
Mi	81:64	331.2	408
Fa	4:3	348.8	498
Fa♯	729:512	372.5	612
Sol	3:2	392.4	702
Sol♯	6561:4096	419.1	816
La	27:16	441.5	906
Si♭	16:9	465.1	996
Si	243:128	496.7	1110
Do	2:1	523.3	1200

Temperamento equabile

Problema fisico

Non si può mai accordare con esattezza uno strumento.

Temperamento equabile

Problema fisico

Non si può mai accordare con esattezza uno strumento.

Problema musicale

La scala naturale e quella pitagorica partono da note consonanti e, quindi, producono solo note gradevoli all'orecchio umano. Lo strumento musicale **voce** si adatta meglio a tali scale

Temperamento equabile

Problema fisico

Non si può mai accordare con esattezza uno strumento.

Problema musicale

La scala naturale e quella pitagorica partono da note consonanti e, quindi, producono solo note gradevoli all'orecchio umano. Lo strumento musicale **voce** si adatta meglio a tali scale

Intervallo di terza

L'orecchio di un musicista preferisce intervallo di terza Do-Mi della scala naturale, che vale $5/4 = 1.25$, a quello della scala temperata, che vale invece $\sqrt[12]{16} \approx 1.26$

LICENZE

Le tabelle della parte musicale sono prese da `fisicaondemusica.unimore.it`

Materiale distribuito attraverso licenza

`https://archive.org/details/IrrazionaliConseguenze`

BIBLIOSITOGRAFIA

Carl Boyer, **Storia della matematica**, Oscar, Mondadori

Eric Bell, **I grandi matematici**, BUR, Rizzoli

`fisicaondemusica.unimore.it`

Ugo Amaldi, **La fisica per i licei scientifici**, vol. 2, Zanichelli

Odifreddi P., **Penna, pennello e bacchetta. Le 3 invidie del matematico**, Laterza, Bari, 2005

FINE